Unità didattica di matematica

Luca Aluffi

Principio di induzione e sue applicazioni

Collocazione

Questa unità didattica è indirizzata ad una classe III di un liceo scientifico tradizionale ed è da affrontare nella seconda parte del I quadrimestre.

Modulo di appartenenza: Ricorsione, progressioni e induzione

La scansione del modulo in unità didattiche è la seguente:

U.D 1: Successioni numeriche e ricorsione

U.D 2: Progressioni aritmetiche e geometriche

U.D 3: Principio di induzione matematica

Prerequisiti

Per affrontare in maniera adeguata l'unita didattica, è necessario che gli alunni posseggano i seguenti prerequisiti:

- L'insieme dei numeri naturali
- Modelli ricorsivi e successioni definite per ricorrenza
- Progressioni aritmetiche e geometriche

Non credo che sia necessaria una verifica a parte dei prerequisiti, poiché le indicazioni sulle conoscenze necessarie alla comprensione di questa unità didattica possono essere dedotte dalle verifiche sommative delle unità didattiche precedenti.

Obiettivi

Possiamo distinguere fra obiettivi cognitivi (sapere) e obiettivi operativi (saper fare).

SAPERE (Obiettivi cognitivi)	**SAPER FARE (Obiettivi operativi)**
Comprendere il significato di un ragionamento induttivo. Comprendere la differenza fra indagine scientifica e dimostrazione matematica. Comprendere tutti i passi della verifica di un processo di induzione. Saper riconoscere i limiti di applicabilità del ragionamento induttivo.	Saper eseguire semplici dimostrazioni per induzione. Saper applicare il principio d'induzione alle progressioni aritmetiche e geometriche. Saper applicare il principio d'induzione a dimostrazioni di tipo geometrico.

Contenuti e tempi

CONTENUTI	**TEMPI**
Introduzione al concetto di induzione. Differenza fra indagine scientifica e dimostrazione matematica. Difficoltà nel generalizzare concetti di carattere particolare.	2 ore
Il principio di induzione matematica. Esercizi.	2 ore
Verifica formativa e correzione.	1 ora
Il principio di induzione matematica generalizzato. Applicazioni del principio di induzione alla progressioni aritmetiche e geometriche.	2 ore
Verifica sommativa.	2 ore
TOTALE:	**9 ore**

Metodologia e strumenti

Per quanto riguarda la metodologia, verranno affiancate a lezioni di tipo frontale, lezioni interattive, per stimolare l'interesse e la partecipazione attiva degli studenti.
Nella trattazione verranno utilizzati lavori di gruppo sotto la supervisione dell'insegnante, ma verrà anche richiesta la collaborazione individuale degli alunni nell'eseguire dimostrazioni alla lavagna.
Per quanto riguarda gli strumenti, è richiesto l'utilizzo solo della tradizionale lavagna e del libro di testo.

Verifiche

Si prevede una verifica formativa della durata di 30 minuti relativa alla prima parte dell'unità didattica con domande teoriche a completamento e domande a risposta chiusa, mirate ad accertare la comprensione e la conoscenza degli argomenti trattati.
Si prevede quindi una prova sommativa, della durata di 2 ore, in cui saranno coinvolti vari livelli di apprendimento (conoscenza, comprensione, applicazione, analisi) di tutti gli argomenti trattati nel corso dell'unità didattica.

Attività di recupero

Si prevede di utilizzare la mezzora successiva alla verifica formativa, per la correzione degli esercizi alla lavagna.
Per quanto riguarda il recupero, verranno svolti esercizi alla lavagna sotto la guida dell'insegnante.
Per gli alunni che dimostrino nella verifica sommativa carenze nella comprensione degli argomenti trattati, si renderà necessario un intervento di recupero pomeridiano, mirato al raggiungimento degli obiettivi necessari per affrontare senza lacune gli argomenti successivi.

Il principio di induzione e le sue applicazioni

La successione dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, … non ha termine poiché, dopo qualunque intero *n* si può scrivere l'intero successivo *n*+1. Questa proprietà dell'insieme dei numeri naturali si esprime dicendo che vi sono *infiniti* numeri naturali. La successione dei numeri naturali rappresenta l'esempio più semplice e intuitivo dell'infinito matematico, che ha un'importanza fondamentale nello sviluppo della matematica moderna.

L'***induzione*** è il procedimento che consiste nel passare da affermazioni di carattere particolare ad affermazioni di carattere generale. Il procedimento inverso, dal generale al particolare, è invece chiamato ***deduzione***.

Un esempio di affermazione di carattere generale è "*tutti i numeri che terminano con* 5 *sono divisibili per* 5", mentre un'affermazione di carattere particolare è "145 *termina con* 5". Dalla prima affermazione possiamo allora dedurre che 145 è multiplo di 5.

Questo ci sembra logicamente impeccabile e anche banale.

Assai più fragile, dal punto di vista logico, è invece il procedimento dell'induzione.

Dal fatto che 145 è multiplo di 5 posso concludere, per induzione, che tutti i numeri che terminano per 5 sono multipli di 5 (vero!), ma potrei anche concludere che tutti i numeri di tre cifre sono multipli di 5 (falso!) o che tutti i numeri che iniziano con 1 sono multipli di 5 (falso!).

Non è sempre così ovvio quale sia la strada giusta per passare dal particolare al generale e, soprattutto, non c'è nessun motivo per cui una proprietà che vale in un caso o anche in diversi casi debba necessariamente valere per tutti i casi. Si tratta di saper cogliere la giusta generalizzazione.

Consideriamo questo problema:

quanto vale la somma dei primi *n* numeri naturali?

Si dice che per punizione al matematico Gauss fosse stato assegnato a scuola il compito di calcolare la somma dei primi 1000 numeri naturali.

Gauss trovò un modo semplice per fare il suo compito, dimostrando fin da giovane le sua grandi capacità di matematico.

Pensò di scrivere i numeri da 1 a 1000 uno di seguito all'altro su una retta, e nella riga sotto gli stessi numeri in ordine decrescente:

1	2	3	…	998	999	1000
1000	999	998	…	3	2	1

Notò così che la somma dei numeri su ogni colonna è sempre uguale all'ultimo numero, 1000, più 1. Il numero delle colonne è invece pari ai numeri che si vogliono sommare, 1000. Sommando quindi tutti i numeri della tabella otterremo 1000 volte la quantità 1001.
In questo modo però, poiché ogni numero è stato scritto due volte, ottengo il doppio della quantità cercata.

Quindi la somma dei primi 1000 numeri naturali sarà: $S_{1000} = \frac{1000 \times 1001}{2} = 500.500$

Questo ragionamento si può ripetere per qualunque numero *n* prevedendo così che la somma dei primi *n* numeri naturali sarà: $S_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$.

A questo punto vogliamo mettere in discussione la legittimità della generalizzazione che abbiamo fatto: dalla verifica di una legge per casi particolari abbiamo dedotto la validità generale della legge stessa.
Per far capire qual è il punto debole nel ragionamento seguito, prendiamo in considerazione la seguente proposizione *P*:

P : "ogni numero della forma $n^2 + n + 41$, con $n \in \mathbb{N}$, è primo".

Per affrontarla, consideriamo la famiglia di proposizioni:

$P(k)$: "*il numero* $k^2 + k + 41$ *è primo*"

dove *k* rappresenta un qualsiasi numero naturale.
Facciamo notare ai ragazzi che la proposizione *P* è vera **se e soltanto se** sono vere **tutte** le particolari $P(k)$, al variare di *k* in $\mathbb{N}$.

Possiamo verificare insieme agli alunni la verità di $P(k)$ per i primi numeri naturali:

$$P(1) = 43,\ P(2) = 47,\ P(3) = 53,\ P(4) = 61$$

Il risultato è sempre un numero primo. Ma è davvero sempre così?
Diciamo che 4 casi sono troppo pochi, bisognerebbe provarne ancora. Ma quanti?
$P(6) = 83,\ P(7) = 97$ ... si direbbe proprio di sì ... sono tutti numeri primi.
Proviamone anche con un numero "*grande*": $P(27) = 729 + 27 + 41 = 797$.
Bisognerebbe provare a vedere se 797 è primo o no.

Poiché 797 è minore di 841, che è il quadrato di 29, basta verificare che non sia divisibile per i numeri primi minori di 29. Facendo un po' di conti, si può concludere che è primo pure lui.
Con un ragionamento induttivo simile al caso precedente, sembra ovvio dedurre la validità della proposizione per qualsiasi numero naturale; conclusione che si rivela però **errata** non appena si prende in considerazione il caso $k = 40$, per il quale si ottiene:

$$40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot (40+1) + 41 = 41 \cdot (40+1) = 41^2 .$$

La proposizione $P(40)$ risulta pertanto falsa e da questo segue la falsità della proposizione generale.
Dunque una proprietà che vale per i primi 39 numeri, può cessare di valere per il quarantesimo!

Proponiamo qualche altro esempio di congetture verificate dai primi numeri naturali, ma false in generale. Il fatto che l'induzione sia un processo "*delicato*" è testimoniato dal fatto che anche alcuni fra i più grandi matematici nel passato hanno commesso qualche passo falso.

Consideriamo una congettura sbagliata fatta da nientemeno che Fermat!
Fermat, dopo aver verificato che $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$, sono tutti numeri primi, congetturò infatti che tutti i numeri del tipo $2^{2^n}+1$ fossero primi.
Più tardi però Eulero trovò che $2^{2^5}+1$ è invece un numero composto! Facendo un po' di conti otteniamo infatti che: $2^{2^5}+1 = 4.294.967.297 = 641 \times 6.700.417$ ed è quindi composto.

Consideriamo un altro esempio non corretto dovuto a Leibniz. Dopo aver dimostrato che:
$n^3 - n$ è divisibile per 3,
$n^5 - n$ è divisibile per 5 e
$n^7 - n$ è divisibile per 7,
Leibniz affermò che, per tutti i numeri dispari *k*, $n^k - n$ è divisibile per *k*.
Egli stesso però si accorse in seguito che $2^9 - 2 = 510$ non è divisibile per 9 e che la sua congettura era falsa.

Consideriamo un ultimo esempio la cui inesattezza è verificabile solo sviluppando programmi su computer che riescano a gestire numeri molto molto grandi.
Per il binomio $991 \cdot n^2 + 1$ troviamo che, qualsiasi sia il valore di $n \in \mathbb{N}$, non riusciamo mai a ottenere un quadrato perfetto.

Possiamo passare tutta la vita a sostituire a *n* uno dopo l'altro milioni e milioni di numeri senza mai ottenere un quadrato perfetto. Ma ecco che se, dopo miliardi di prove, affermassimo che il binomio non è mai un quadrato perfetto commetteremmo un errore.
Infatti si è trovato che c'è almeno un valore di *n* per cui si ottiene un quadrato!
Questo succede per *n* = 12.055.753.790.331.359.447.442.538.767.

Questi esempi sottolineano i problemi che si possono incontrare nel generalizzare risultati particolari: la verifica di una proposizione per un certo numero di casi, anche molto grande, non può garantire la sua validità generale.

Questa constatazione segna una differenza fondamentale tra il metodo di indagine della matematica e quello delle scienze empiriche.
Il metodo induttivo dell'indagine scientifica, infatti, consiste proprio nel procedere da una particolare serie di osservazioni di un certo fenomeno alla formulazione di una legge generale che governa il verificarsi di quel fenomeno. Il grado di certezza con cui la legge è in tal modo stabilita dipende dal numero delle singole osservazioni e delle conferme: ogni legge e teoria scientifica è quindi vera "***fino a prova contraria***", fino a quando, cioè, qualche osservazione o qualche esperimento non la contraddica o ne limiti la validità.
Questo modo di procedere non appartiene alla matematica: ogni congettura, seppur verificata in moltissimi casi, non rappresenta altro che un'ipotesi (magari molto attendibile) e diventa un teorema soltanto quando è stata dimostrata, cioè quando si può far vedere che essa è conseguenza logica necessaria delle ipotesi che si accettano come valide.
Dunque alcune proprietà possiamo verificarle per molti numeri, magari per miliardi, ma questo non può garantirci la loro validità universale.

Ci proponiamo di trovare uno strumento matematico in grado di garantirci la validità di affermazioni ottenute per induzione.

Consideriamo la successione dei numeri naturali e immaginiamo che ogni numero generi il **successivo**. Ecco che allora abbiamo un **capostipite**, il numero 1, che è una specie di "*Adamo*" dei numeri, il quale genera il numero 2, che genera il 3, ecc.
Diremo che una proprietà dei numeri naturali è **ereditaria** se si trasmette di padre in figlio, cioè da un numero al successivo. Dire che una proprietà dei numeri naturali è ereditaria significa affermare

che si trasmette da un numero al successivo e cioè che, se vale per un numero *n*, allora vale anche per *n* + 1.

Il cosiddetto **principio di induzione matematica** afferma che se una proprietà vale per il numero 1 ed è ereditaria, trasmettendosi di padre in figlio, allora vale per tutti i numeri.

Per dimostrare la validità di un'affermazione per induzione è necessario dunque verificare:

1. che la proposizione valga per il numero 1, (cioè per "*Adamo*");
2. che se la proposizione vale per ogni numero *k*, allora vale anche per il successivo *k* + 1, (cioè che è ereditaria).

Bisogna cioè:

1. Verificare direttamente la proposizione per *n* = 1, detta **base dell'induzione**.

2. Supporre valida la proposizione per un ipotetico numero naturale che indichiamo con *k* (**ipotesi induttiva**) e provare mediante un ragionamento logico o passaggi di tipo algebrico validi per ogni possibile valore di *k*, che da essa consegue necessariamente la validità della proposizione per il numero successivo, cioè per $k+1$ (**passo dell'induzione**).

Questo modo di procedere ci fornisce uno schema di ragionamento che ci permette di dimostrare la validità di una certa proposizione per **tutti** i numeri.

Riprendiamo ora il problema lasciato precedentemente in sospeso e andiamo a dimostrare, applicando la tecnica ora descritta, che effettivamente la congettura che avevamo fatto era corretta.

Proposizione

La somma dei primi *n* numeri naturali è data dalla formula

$$P(n):\ 0+1+2+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$$

per ogni numero naturale *n*.

Dimostrazione per induzione

1. Verifichiamo la **base dell'induzione**:

$\frac{1(1+1)}{2}=1$. La proposizione $P(1)$ è vera.

2. A partire dalla seguente **ipotesi induttiva**:

supponiamo che sia vera la proposizione $P(k)$ per un certo numero naturale *k*; cioè

$$0+1+2+...+k=\frac{k\left(k+1\right)}{2},$$

dobbiamo dimostrare che dall'ipotesi induttiva consegue necessariamente la validità di $P(k+1)$, cioè la formula che otteniamo dalla $P(n)$ assumendo $n=k+1$ (**passo dell'induzione**):

$$0+1+2+....+k+(k+1)=\frac{(k+1)\left(k+2\right)}{2}.$$

Considerando il primo membro dell'uguaglianza, applicando l'ipotesi induttiva abbiamo:

$$(0+1+2+....+k)+(k+1)=$$

$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Mediante passaggi algebrici che sono validi per qualsiasi numero naturale *k*, abbiamo così svolto il passo dell'induzione. La nostra dimostrazione è così terminata.

Quella che, verificata solo per alcuni casi, non era altro che una semplice congettura, ha acquistato adesso la validità universale di un **teorema**.

VERIFICA FORMATIVA

1) L'***induzione*** è il procedimento che consiste nel passare da affermazioni di carattere …… ad affermazioni di carattere …….

2) Dopo aver osservato che:

$$1 = 1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

segna con una crocetta le conclusione che possiamo tirare:

[ ] La somma dei primi *n* numeri primi si può ottenere dalla formula: $P(n) = n^2$

[ ] La somma dei primi *n* numeri dispari si può ottenere dalla formula: $P(n) = n^2$

[ ] I numeri dispari sono infiniti

[ ] Non possiamo dedurre nessuna conclusione senza aver provato *almeno* i primi 100 casi

[ ] Non possiamo dedurre nessuna conclusione

3) Data l'affermazione: $n^3 + 11n$ è sempre divisibile per 6 per ogni numero naturale *n*.

a. Verificare la ***base dell'induzione***.
b. Individuare l'***ipotesi induttiva***.
c. Verificare usando l'ipotesi induttiva il ***passo dell'induzione***.

Possiamo allora concludere che ……
……
……

Esaminiamo adesso una proprietà geometrica che la classe ha sicuramente esaminato nel biennio che ci porterà ad una generalizzazione del principio di induzione.

In un poligono convesso di *n* lati, la somma degli angoli interni è (*n*-2) volte angoli piatti:

$$P(n) = (n-2)\cdot\pi$$

Analizzando l'enunciato della proposizione, si può far notare alla classe che una differenza salta immediatamente agli occhi rispetto al caso precedente: in questo caso, le proposizioni $P(0)$, $P(1)$ e $P(2)$ non hanno alcun senso, essendo almeno tre i lati di un poligono.

Chiediamo allora di suggerire qualche strada per aggirare l'ostacolo e riuscire lo stesso ad applicare il principio d'induzione.

L'idea è che ci si può riportare al caso precedente semplicemente cambiando il capostipite "*Adamo*".
Otteniamo quindi il seguente:

PRINCIPIO D'INDUZIONE MATEMATICA GENERALIZZATO

Sia n_0 un numero naturale e *P* una certa proprietà che soddisfa le seguenti condizioni:

1. $P(n_0)$ è vera;
2. se è vera $P(k)$ allora è vera anche $P(k+1)$, per ogni numero naturale $k \geq n_0$.

Allora la proposizione $P(n)$ è vera per ogni numero naturale $n \geq n_0$.

Siamo adesso nelle condizioni di dimostrare il nostro risultato.

Dimostrazione

1) ***Base dell'induzione***:

$d_3 = 0$.

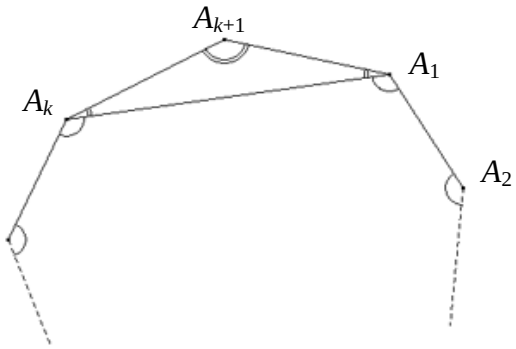
2) Supponiamo che, per un generico $k \geq 3$, risulti:

$$P(k) = (k-2)\cdot\pi \qquad (\textbf{\textit{Ipotesi induttiva}})$$

Consideriamo, allora, un poligono convesso di $k+1$ lati.
Dobbiamo dimostrare (***passo dell'induzione***) che dall'ipotesi induttiva consegue necessariamente che il numero delle sue diagonali è dato dalla

$$P(k+1) = (k-1)\cdot\pi .$$

Siano $A_1, A_2, ..., A_k, A_{k+1}$ i vertici del nostro poligono. Consideriamo il poligono di vertici $A_1, A_2, ..., A_k$: per esso vale l'ipotesi induttiva e, con l'aiuto della seguente figura



osserviamo che il poligono con $k+1$ lati si può considerare come l'unione di un poligono di *k* lati e di un triangolo. La somma degli angoli interni del poligono di $k+1$ lati sarà uguale allora alla somma degli angoli interni del poligono di *k* lati e degli angoli interni del triangolo. Quindi:

$$P(k+1) = P(k) + \pi = (k-2)\cdot\pi + \pi = (k-1)\cdot\pi \ .$$

Abbiamo così provato il passo dell'induzione e quindi la validità generale della proposizione.

Richiamando le definizioni di progressione aritmetica e geometrica, proponiamo a questo punto la dimostrazione per induzione di quelle formule che sono già state studiate nell'unità didattica precedente.
È questo il momento di far cogliere il profondo legame che c'è tra la definizione ricorsiva di una successione e il principio d'induzione.
Proviamo a dimostrare quindi tutte quelle formule che avevamo ricavato ed imparato ad usare nell'unità didattica precedente, senza però darne una dimostrazione rigorosa.
Possiamo adesso ricavare insieme la dimostrazione di alcune formule, per poi lasciare agli alunni le altre per esercizio e per verifica della comprensione sia del principio di induzione che delle successioni stesse.

Per esempio possiamo dimostrare che la somma dei primi *n* termini di una progressione aritmetica è

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} .$$

Dimostrazione

Come abbiamo visto nell'unità didattica precedente:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Procediamo dunque con la verifica

1) della **Base dell'induzione:** $S_1 = a_1$

2) a partire dalla **ipotesi induttiva** $S_k = k \cdot \frac{a_1 + a_k}{2}$ dobbiamo ottenere la validità della relazione per il passo $k + 1$: $S_{k+1} = (k+1) \cdot \frac{a_1 + a_{k+1}}{2}$.

   Infatti si può osservare che:

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = S_k + a_1 + k \cdot d =$$

$$= k \cdot \frac{a_1 + a_k}{2} + a_1 + k \cdot d =$$

$$= (k+1) \cdot \frac{a_1 + a_{k+1}}{2}.$$

VERIFICA SOMMATIVA

1. Dimostrare che i numeri della forma $n^3 - n$ sono multipli di 3, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2. Considerare la progressione aritmetica di *ragione 3* il cui *primo elemento* sia 10.
   Dimostrare per induzione che il termine ennesimo a_n della progressione è dato dalla
   $$a_n = 10 + 3 \cdot (n-1).$$

3. Dimostrare per induzione la seguente formula:
   $$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

4. Dimostrare che il numero delle diagonali di un poligono convesso di *n* vertici è dato dalla formula:
   $$d_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

5. Come sai, in una serie geometrica di ragione *q* il termine *n*-esimo è dato dalla formula $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, per ogni numero naturale *n*.
   Utilizzando la formula precedente, dimostra per induzione che la somma S_n dei primi *n* termini di una serie geometrica è data dalla formula (anch'essa nota):
   $$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

VALUTAZIONE

	ES. 1	**ES. 2**	**ES. 3**	**ES. 4**	**ES. 5**
PUNTI	0 – 2	0 – 3	0 – 4	0 – 4	0 – 5

Punteggio massimo: 18 punti

Dato il punteggio grezzo *p* il voto *V* in decimi si calcola applicando:

$$V = 1 + \frac{p}{2}.$$

Si prevede quindi che i voti possano andare da un minimo di 1 ad un massimo di 10.