LA FILOSOFIA DELLA MATEMATICA DEL '900*

Ettore Casari, Sansoni, 1973, pp. 1-25.

1. La rinascita del rigore matematico nell'800

Quando si tenti di formulare schematicamente le differenze che intercorrono fra la matematica del secolo XVIII e quella del secolo XIX, non è difficile avvedersi del fatto che l'accento non va posto tanto sulla pur innegabile e, anzi, talora straordinaria novità di alcuni oggetti e contenuti dell'indagine matematica, quanto piuttosto sulle modalità di quest'ultima.

Ciò che infatti meglio contraddistingue la matematica ottocentesca da quella del secolo di Eulero e di Lagrange è il graduale, ma sicuro, affermarsi in essa di un atteggiamento rigoristico che si manifesta attraverso l'emergere progressivo di una esigenza profonda di chiarezza e di determinazione dei propri concetti e dei propri metodi, e poi, via via, di fondazione delle varie discipline e infine, più in generale, di tutta la matematica.

Non è facile cogliere e seguire, all'interno del complesso e articolato processo reale attraverso cui matura il nuovo livello di consapevolezza critica, i temi e le direttrici fondamentali di movimento; tuttavia - sia pur con una certa inevitabile semplificazione - pare possibile individuare due grandi linee di svolgimento.

Queste approderanno alla fine del secolo a due prospettive generali, capaci, ognuna per proprio conto, di fornire una base unitaria all'intero edificio della matematica; tuttavia va rilevato come soltanto agli inizi del nostro secolo queste due linee di svolgimento raggiungano compiuta coscienza di questa loro capacità e dunque scoprano anche, fra l'altro, le relative incompatibilità. Nel corso dell'Ottocento, infatti, esse procedono per larga parte in maniera del tutto indipendente e taluni loro contrasti di fondo non sono che parzialmente avvertiti quando non del tutto ignorati. Ciò è dovuto anche al fatto che esse sono legate, in quel tempo, a mondi e temi matematici diversi: a quelli degli analisti l'una, a quelli dei geometri e degli algebristi l'altra.

---

*Questo volume consiste di una parte introduttiva, trascritta in queste pagine, e della traduzione di articoli di, nell'ordine del libro, Bertrand Russell, Jaques Herbrand, Johann von Neumann, Kurt Gödel, Arend Heyting e Alfred Tarski. A questi articoli si riferiscono le successive note a pié di pagina.

2. Il riduzionismo ottocentesco

Una di queste grandi linee, quella che chiameremo del "riduzionismo ottocentesco", attraversa alcune fasi fondamentali. La prima di queste può farsi iniziare alla svolta del secolo allorché gli studi del danese Kaspar Wessel (1745-1818), dello svizzero Jean Robert Argand (1768-1822) e del grande tedesco Karl Friedrich Gauss (1777-1855), fornendo una interpretazione geometrica dei numeri complessi come punti del piano, iniziano quel processo di riconduzione della teoria dei numeri complessi a quella dei reali che, per quanto attiene specificamente al concetto di numero complesso, si concluderà nel 1843 con la "moderna" definizione dei complessi come coppie di reali ad opera dell'irlandese Rowan Hamilton (1805-1865), ma nel quale un ruolo di primo piano toccherà al francese Louis Augustin Cauchy (1789-1857) e al suo reimpianto della teoria delle funzioni di variabile complessa. La seconda fase inizia con lo stesso Cauchy e consiste nella determinazione logicamente soddisfacente dei fondamentali concetti dell'analisi: limite, convergenza, continuità, derivata, integrale etc. Contributi importanti a questa seconda fase furono recati dal norvegese Nieis Abel (1802-1829), dal boemo Bernhard Bolzano (1781-1848) e soprattutto dal tedesco Karl Weierstrass (1815-1897). La terza fase, che viene usualmente detta della "aritmetizzazione dell'analisi", e che è caratterizzata dalla riconduzione della teoria dei numeri reali a quella dei numeri naturali, è iniziata dallo stesso Weierstrass e culmina con la pubblicazione simultanea nel 1872 delle "classiche" fondazioni del sistema dei reali dei tedeschi Georg Cantor (1845-1918) e Richard Dedekind (1831-1916). In questa fase dell'aritmetizzazione dell'analisi comincia fra l'altro a emergere una contrapposizione che nel nostro secolo avrà, come diremo a suo tempo, sviluppi allora inimmaginabili. Alla riduzione di Weierstrass, Cantor, Dedekind e altri, che usano più o meno esplicitamente il concetto di funzione o di insieme qualsiasi, si contrappone quella del tedesco Leopold Kronecker (1823-1891) il cui obiettivo fondamentale è invece proprio la eliminazione dalla matematica di questi concetti. L'aritmetizzazione dell'analisi è seguita da due contemporanei sviluppi. Da un lato il tedesco Gottlob Frege (1848-1925) porta alle estreme conseguenze il processo riduttivo applicato ai sistemi numerici tradizionali riuscendo a riportare il concetto di numero naturale a una combinazione di concetti puramente logici (a questa fase del "riduzionismo" alla quale, sia pure in modo peculiare, partecipò anche Dedekind, si è soliti dare il nome di "logicizzazione dell'aritmetica"[1]); dall'altro, Cantor inizia l'edificazione della sua gigantesca teoria dei numeri transfiniti della quale, esempio forse unico nella storia del pensiero matematico, riuscirà, partendo

[1]La logicizzazione dell'aritmetica viene illustrata nella lettura: B. RUSSELL, *Introduzione alla filosofia della matematica.*

praticamente dal nulla, a costruire gran parte del l'edificio spalancando, fra l'altro, le porte a una matematica di una generalità e di una potenza unificatrice che non trova analogie nell'intera storia del pensiero umano.

3. I caratteri fondamentali del riduzionismo

Senza tentare di entrare meglio nel grandioso lavoro di riduzione operato, limitiamoci a richiamare alcuni dei tratti essenziali che caratterizzarono nel loro complesso le indagini dei pensatori che si mossero nel solco di questa tradizione e che costituirono, al di là delle pur grandi differenze, i momenti comuni essenziali delle loro concezioni filosofico-matematiche.
In primo luogo va detto che il processo di riduzione fu concepito in ogni sua fase come un processo di analisi contenutisticamente determinata. I residui del lavoro riduttivo potevano certo, a loro volta, essere oggetto di ulteriore analisi ma mai, in nessuno stadio, essi furono concepiti come il possibile risultato di mere postulazioni.
In secondo luogo è importante notare come il processo riduttivo venisse concepito in sostanza come una graduale espulsione dell'intuizione dalla matematica; ciò, però, non nel senso che si ritenessero le asserzioni o i concetti della matematica come dei costrutti verbali privi di contenuto, ma in quanto si riteneva l'intuizione incapace di cogliere l'intero contenuto razionale dei concetti (e quindi anche, fra l'altro, responsabile di errori e fraintendimenti).
Da ultimo va rilevato come, in ogni suo stadio, il procedimento riduttivo non mise mai in dubbio la validità della logica che sovrintendeva ad esso; se si eccettua la fase più schiettamente logicista, tale logica era anzi considerata talmente piana e pacifica che non si sentiva nemmeno il bisogno di esplicitarla.

4. La concezione tradizionale dell'assiomatica

L'altra grande linea di sviluppo che percorre il pensiero matematico e filosofico-matematico dell'Ottocento è connessa al problema della organizzazione assiomatica. Punto d'approdo di questa linea di sviluppo sarà un modo radicalmente nuovo di concepire il senso, la portata e la maniera stessa di articolarsi del metodo assiomatico.
Molto sommariamente, l'idea di organizzazione assiomatica di una disciplina matematica, così come la si può ritrovare formulata o applicata nelle opere di Aristotele o di Euclide, di Pascal o di Newton, è questa: costituenti fondamentali di una teoria sono i *concetti* che categorizzano la sfera di esperienza oggetto della teoria, e le *proposizioni* che di quella sfera di esperienza descrivono il comportamento. Non

ogni concetto risulta immediatamente intelligibile. Se si riesce a definirlo logicamente in termini di altri concetti, allora si è riusciti a ricondurre il problema della sua intelligibilità a quello della intelligibilità dei concetti mediante i quali lo si è definito. Analogamente, non ogni proposizione vera appare immediatamente tale. Se la si dimostra logicamente a partire da altre, allora si è ricondotto il problema della sua verità a quello della verità delle proposizioni tramite le quali la si è dimostrata. L'ideale dell'organizzazione assiomatica di una teoria consiste nel rinvenire un certo numero, possibilmente ristretto, di concetti ai quali ogni altro concetto possa venir ricondotto tramite *definizioni*, e un certo numero, possibilmente piccolo, di proposizioni vere alle quali ogni altra proposizione vera della teoria possa venir ricondotta tramite *dimostrazioni*. L'intelligibilità dei concetti ultimi, così come la verità delle proposizioni ultime (i cosiddetti assiomi), dev'essere immediata. È la dimensione *extra-logica* dell'intuizione che fornisce il fondamento primario della costruzione; le dimensioni logiche della definizione e della dimostrazione hanno essenzialmente il compito di trasmettere l'evidenza su per tutto l'edificio.

5. La crisi dell'euclideismo

A trasformare radicalmente questa prospettiva concorsero in maniera determinante le vicende della geometria elementare. Dopo oltre duemila anni di dubbi e di tentennamenti, dopo innumeri tentativi di trovare una dimostrazione per esso, tre uomini, il già ricordato Gauss, il russo Nicolai Ivanovic Lobacewski (1793-1856) e l'ungherese Janos Boiyal (1802-1860) più o meno nello stesso tempo, osano rinunciare al postulato che per un punto esterno a una retta data passa una sola parallela alla retta data, e iniziano la costruzione di una geometria in cui tale postulato non vale più. Le loro idee tardano parecchio a trovare adeguata eco nel mondo dei matematici, ma, a partire dagli anni sessanta, esse divengono patrimonio comune e oggetto di sempre più ricche e vaste generalizzazioni, in connessione anche con gli enormi sviluppi avuti nel frattempo dalla geometria proiettiva che dai tempi "eroici" di Jean-Victor Poncelet (1788-1867) attraverso l'opera di numerose figure di grande rilievo (principalmente francesi e tedesche) era venuta trasformandosi sino a divenire nelle mani dell'inglese Arthur Cayley (1821-1895) e del tedesco Felix Klein (1849-1925) uno strumento concettuale di grande generalità e flessibilità.
Il colpo recato dalla scoperta di queste possibilità alternative di costruire la geometria elementare alla ingenua fiducia nella intuizione come capace di dare fondamento e giustiticazione all'intero edificio matematico della geometria, fu enorme. Lo stesso concetto di verità matematica fu messo in aperta crisi. Andò così,

fra l'altro, maturando, sia pur faticosamente, una distinzione fra una geometria matematica e una geometria fisica, fra una geometria, cioè, che viene liberamente sviluppando le sue proposizioni a partire da altre la cui significatività specifica appare sempre meno rilevante, e una geometria intesa come ramo della fisica che cerca, non dissimilmente da ogni altro ramo della fisica di descrivere e organizzare razionalmente un certo ambito del l'esperienza sensibile, in particolare quello della esperienza spaziale. Il problema della "verità" delle proposizioni geometriche si sdoppia quindi a poco a poco in un problema di "verità matematica" che tenderà sempre più a identificare questa con l'essere conseguenza logica degli assiomi (salvo il proporre a sua volta la questione, tanto importante nel seguito di quel secolo e ancor più nel nostro, di sapere che cosa questo "essere conseguenza logica" possa veramente voler dire) e in un problema di "verità empirica" che negli sviluppi della epistemologia successiva finirà con il confluire nel più generale problema del rapporto fra il mondo dell'esperienza sensibile e le proposizioni che pretendono di descriverlo.

6. Le equazioni algebriche

Accanto alla geometria, l'algebra ha un ruolo di grande rilievo nella "rivoluzione assiomatica". Due sono i fenomeni che caratterizzano gli sviluppi di questa disciplina nel secolo scorso e in particolare nella sua prima metà.
Da un lato, la teoria delle equazioni algebriche, che aveva costituito per secoli il tema precipuo per non dire esclusivo dell'indagine algebrica, ottiene una sorta di sistemazione e organizzazione per certi versi definitiva; dall'altro, questa stessa problematica passa in certo modo in secondo piano e l'orizzonte della tematica algebrica subisce un radicale ampliamento.
È opportuno osservare che, contrariamente a quel che si potrebbe supporre, il secondo fenomeno non è una conseguenza del primo. Almeno entro certi limiti, infatti, i due processi si svolgono indipendentemente l'uno dall'altro. Diversi anche gli ambienti culturali in cui hanno luogo: essenzialmente francese il primo fenomeno, soprattutto britannico il secondo. Solo più tardi questi due processi sapranno, per così dire, ricongiungersi, contribuendo, accanto ad altri fattori che dobbiamo necessariamente trascurare, a dare all'algebra il nuovo volto che essa assume nella seconda metà dell'Ottocento.
Protagonista del primo fenomeno fu il francese Evariste Galois (1811-1832), morto giovanissimo in un oscuro duello. Le sue geniali intuizioni non furono in realtà conosciute che dopo il 1846 e anche allora faticarono non poco a farsi veramente comprendere e apprezzare. Solo verso la fine degli anni sessanta, soprattutto per merito del francese Camille Jordan (1838-1922), si può dire che l'acquisizione

dell'eredità di Galois è completata.
Ciò che Galois, sviluppando talune idee di Lagrange, del già ricordato Abel e dell'italiano Paolo Ruffini (1765-1822), riuscì ad ottenere, fu di associare a ogni equazione algebrica un sistema di permutazioni (il "gruppo di Galois dell'equazione") il quale è legato alla equazione in modo tale che questa è risolubile mediante radicali se e solo se quello soddisfa una certa condizione strutturale. La domanda che era venuta via via maturando e precisandosi nel corso di tre secoli aveva finalmente una risposta. Di più, quella risposta era stata ottenuta ricorrendo a punti di vista strutturali che, per la loro generalità, cominceranno ben presto a essere coltivati e studiati a prescindere dal particolare caso, quello dei gruppi di sostituzioni (anzi di quei particolari gruppi di sostituzioni che sono i gruppi di Galois di un'equazione), nel quale essi erano sorti e per il quale essi erano stati elaborati.

7. La nascita dell'algebra astratta

L'altro fenomeno passa attraverso una serie di tappe che molto, ma molto schematicamente, possono venir cosi indicate.
Si comincia con l'isolare le proprietà strutturali fondamentali delle operazioni aritmetiche (commutatività associatività, distributività etc.) e le si colloca alla base di uno sviluppo essenzialmente algoritmico-deduttivo di quella che venne allora chiamata "algebra aritmetica". Attraverso un nebuloso "principio di permanenza delle forme equivalenti" si estendono le leggi dell'"algebra aritmetica" a una "algebra simbolica" che viene concepita in qualche modo come un'algebra delle grandezze in generale. Questi due primi passi sono essenzialmente opera dell inglese George Peacock (1791-1858). La terza tappa è costituita dalla scoperta di certi enti (i quaternioni) che, pur avendo ragionevoli titoli per essere considerati delle grandezze, non si comportano sempre come vorrebbe l'algebra simbolica (in particolare violano la legge di commutatività della moltiplicazione). Questo passo, il cui merito spetta al già ricordato William Rowan Hamilton, è stato talvolta, e non del tutto impropriamente, paragonato alla scoperta dell'indipendenza del postulato delle parallele. Un quarto momento può essere indicato nella graduale emancipazione del concetto di "algebra di un sistema di grandezze" dall'idea unitaria teorizzata da Peacock, attraverso la creazione, accanto a quella dei quaternioni, di algebre ancor più "aberranti", come quella dei vettori, delle matrici etc. Fra i molti nomi ai quali e legato questo sviluppo ricordiamo soltanto quelli del tedesco Hermann Grassmann (1809-1877) e del già nominato Arthur Cayley. La quinta tappa decisiva va rinvenuta nell'acquisizione dell'idea che una trattazione algebrica, ossia una trattazione che consista nello sviluppo puramente formale di

certe asserzioni-base circa le operazioni in discussione, non sia possibile soltanto di "grandezze" ma anche di enti del tutto diversi, per esempio: proposizioni, classi, trasformazioni di un insieme. Immenso fu in questa direzione il contributo recato dall'irlandese George Boole (1815-1864) con la sua creazione di un'algebra della logica.

8. La rivoluzione assiomatica

Gli sviluppi della geometria e dell'algebra, ai quali abbiamo accennato, concorsero in misura determinante a modificare radicalmente la prospettiva assiomatica.
La funzione fondante dell'intuizione è stata dissolta; la garanzia della legittimità razionale del sistema dev'essere cercata altrove, in particolare - si comincia a dire - in una non-contraddittorietà degli assiomi; che cosa trasmettano le definizioni e le dimostrazioni non è più ben chiaro, ma l'algebra astratta, che sta sempre meglio imparando a trattare unitariamente sistemi eterogenei di enti, fa gradualmente intravvedere la possibilità di concepire le operazioni logiche del definire e del dimostrare come quelle operazioni capaci di generare i costrutti concettuali possibili e le proposizioni vere in ogni possibile sistema di enti che si trovi a verificare gli assiomi. Contemporaneamente, proprio questa idea, unitamente al graduale dissolversi del concetto tradizionale di verità matematica, sposta radicalmente il rapporto fra assiomi e teoremi, fra concetti primitivi e concetti derivati. Se prima assiomi e concetti primitivi erano in un certo senso solo il residuo ultimo di un lavoro definitorio e dimostrativo che veniva concepito essenzialmente come un lavoro riduttivo, adesso assiomi e relativi concetti, a significato largamente indeterminato, diventano sempre più il vero punto di partenza, non soltanto logico ma anche epistemologico, del lavoro del matematico; la funzione creativa dell'organizzazione assiomatica viene sempre più esaltata Punto d'arrivo di questa rivoluzione assiomatica operatasi nel corso del secolo sono da un lato i *Fondamenti della Geometria* del tedesco David. Hilbert (1862-1943), e dall'altro i lavori sui fondamenti dell'aritmetica e della geometria che vengono svolti nella scuola del torinese Giuseppe Peano (1858-1932).

9. Il programma logicista di B. Russell

Già abbiamo accennato al fatto che è solo all'inizio di questo secolo che il filone "riduzionista" assume, attraverso le idee e il lavoro del filosofo e matematico inglese Bertrand Russell (1872-1970), quei caratteri di globalità e di onmcomprensività che solo implicitamente erano presenti nelle idee e nelle opere dei grandi maestri dell Ottocento.

Frege, per esempio, si era soprattutto preoccupato di ridurre alla logica la teoria dei numeri e, pur senza trascurarne completamente l'opera, non aveva certo colto tutta la ricchezza e tutta la potenza delle nuove intuizioni di Cantor; questi per parte sua, non era mai riuscito a superare una certa diffidenza verso le dimensioni più schiettamente logiche della teorizzazione di Frege e aveva finito per ignorarne i fondamentali contributi. Nemmeno Dedekind, che pure per tanti versi occupava una posizione intermedia fra i due, era riuscito completamente a vincere certe sue titubanze e perplessità.
Russell conosceva bene l'opera di Cantor e dopo che il fortunato incontro con Peano al Congresso di Parigi del 1900 lo aveva messo in contatto con le grandi possibilità contenute nel patrimonio logico elaborato dalla scuola torinese, affrontò in tutta la sua generalità il problema della riduzione della matematica alla logica.

10. La scoperta delle antinomie

Fu in questo contesto che egli fece ben presto (1902) una memorabile scoperta destinata a influenzare profondamente la problematica e la tematica della logica e della filosofia della matematica del nostro secolo. Lavorando su una delle grandi intuizioni cantoriane, Russell scoprì che il sistema generale di logica proposto da Frege quale base della riduzione era in realtà contradditorio.
La "salda roccia" su cui, nelle intenzioni di Frege, doveva posare, finalmente sicura, l'intera matematica, si sgretolava e la stessa prospettiva riduzionista, o, come da qualche tempo si diceva, "logicista", sembrava dissolversi nell'assurdo.
Russell, tuttavia, non si rassegnò a questo fallimento. Convinto com'era della sensatezza di fondo della prospettiva logicista, intraprese uno studio intenso e approfondito alla ricerca delle radici più riposte della sua antinomia e delle altre analoghe contraddizioni che nel frattempo emergevano da ogni parte.

11. Il problema degli enti matematici

È proprio nel corso di questa ricerca che Russell entra decisamente in contatto con un problema che, sebbene non ignorato dalla filosofia della matematica del secolo precedente, era rimasto tuttavia ben lontano dall'aver rivelato quella ricchezza e complessità di articolazioni che esso mostrerà in questo secolo: il problema della natura degli enti matematici.
Le indagini russelliane sulle antinomie e sui modi di eluderle rappresentano un momento fondamentale nel processo di chiarificazione di questo problema; ciò non tanto per le esplicite osservazioni di Russell al riguardo, quanto piuttosto perché, involgendosi nelle difficoltà delle soluzioni al problema delle antinomie che

egli vagheggia, il grande logico inglese finisce con il far sempre più chiaramente emergere la possibilità, che sarà peraltro sfruttata consapevolmente soltanto dagli studiosi successivi, di costruzioni logico-matematiche alternative, legate a scelte e posizioni filosofiche diverse circa la natura degli enti matematici.

12. Le definizioni impredicative

Cruciale è, in questo contesto, il momento in cui Russell, esaminando le varie antinomie, si avvede del fatto che in ognuna di queste è usato un procedimento definitorio (che in base ad una proposta del grande matematico francese Henri Poincaré (1854-1912) verrà poi detto "impredicativo") e che consiste nel definire un ente facendo anche riferimento a delle totalità alle quali l'ente da definire appartiene. Illustriamo brevemente il nucleo teorico della questione servendoci di un discorso sui numeri naturali. Accettiamo, *senza problematizzare questa ipotesi*, di disporre già in un qualche modo dei numeri naturali che prendiamo come nostro oggetto di studio. Consideriamo ora le due seguenti definizioni:
(a) il numero uno è, per definizione, l'unico numero naturale che, moltiplicato per un qualsiasi numero, dà come risultato quel numero;
(b) l'insieme dei numeri pari è, per definizione, l'unico insieme che è contenuto in ogni insieme il quale: I) contenga il numero 2; II) se contiene un numero n contiene anche il il numero $n + 2$.
Si tratta, in entrambi i casi, di definizioni in cui un ente - in (a) il numero uno, in (b) l'insieme dei numeri pari - viene definito facendo riferimento a delle totalità cui l'ente da definire appartiene: in (a) quella dei numeri naturali, o, meglio, la totalità dei numeri che moltiplicati per ogni altro numero danno quest'altro numero; in (b) la totalità degli insiemi di numeri naturali, o, meglio, la totalità degli insiemi di numeri naturali che godono delle proprietà (I) e (II).
Orbene la (a) non è problematica. In base alla nostra ipotesi, infatti, noi disponiamo già dei numeri naturali e dunque la (a) non avendo altro compito che quello di *isolare* un certo numero può tranquillamente servirsi di una totalità che è data indipendentemente da essa. Ma che ne è della (b)? Noi abbiamo accettato che ci siano i numeri, non le loro proprietà o, se si preferisce, i loro insiemi. Questi devono venir *costituiti* dalle nostre definizioni. Ma come faccio a costituire una proprietà se, nel farlo, uso una totalità che già la presuppone. Delle due l'una: o l'avevo già costituita prima, e allora la definizione potrà magari anche essere lecita ma non costituisce proprio un bel nulla, oppure non c'era, e allora la definizione è del tutto vuota e priva di senso.
Accade ora che molte definizioni del tipo (b) risultino eliminabili, sostituibili cioè con definizioni che non presentano problemi di questo genere; è questo, in par-

ticolare, il caso della nostra che può naturalmente venir sostituita dalla pacifica definizione: l'insieme dei numeri pari contiene tutti e soli i multipli di due. Tale possibilità non è però generale; vi sono cioè definizioni del tipo (b) che, con tutta la più buona volontà del mondo, non si lasciano proprio eliminare.

13. Descrivere o costituire?

Le vie d'uscita sembrano essere solo due: o persevero nella mia idea che le proprietà dei numeri sono il risultato di un atto costitutivo della mia attività razionale, e allora debbo abbandonare quel tipo di definizione perché in realtà esso è vuoto (e anzi, pensa Russell, "vera" fonte di situazioni antinomiche); oppure rinuncio a questa mia convinzione e mi rassegno all'idea che le proprietà dei numeri sono in qualche modo date indipendentemente dalla mia attività razionale, e allora (trovata fra l'altro altrove la "vera" radice delle antinomie) posso senz'altro usare quelle definizioni dato che esse, non dissimilmente da quelle, del tipo (a), hanno ora soltanto la funzione di isolare, identificare qualcosa che già c'è.

In questa contrapposizione emergente fra una concezione *descrittiva* e una concezione *costitutiva* della Matematica, Russell si dibatté a lungo, pressato da una parte dalla naturale insoddisfazione di dovere in qualche modo accettare un mondo di idealità oggettive a noi esterno e di cui noi saremmo i pazienti "scopritori", e non meno premuto, dall'altra, dalla aspirazione a non sottoporre il patrimonio matematico a quelle mutilazioni e restrizioni che conseguono al rifiuto delle definizioni impredicative. Di passaggio notiamo che quelle restrizioni e mutilazioni che risultano dal rifiuto delle definizioni impredicative apparivano a Russell, per una serie di motivi che ci è impossibile qui illustrare, assai più gravi e profonde di quel che esse non appaiano a noi che veniamo dopo oltre mezzo secolo di sviluppo e approfondimento della questione

In questa "ambiguità" russelliana si colloca in particolare il tentativo del logico inglese di soddisfare entrambe le esigenze attraverso l'aggiunta alla cosiddetta "teoria ramificata dei tipi" (che mira a escludere le costruzioni impredicative) del celeberrimo "assioma di riducibilità" che gli studiosi successivi hanno aspramente criticato proprio in quanto tentativo di impossibile mediazione fra due posizioni inconciliabili.

14. Il predicativismo

Il contrasto fra una concezione della matematica sostanzialmente descrittiva e una precipuamente costitutiva, contrasto che nel seguito, rinverdendo una terminologia illustre sarà spesso discusso come contrasto fra una concezione "platonistica" della matematica e una concezione "concettualistica" della stessa, così come esso emerge dalle posizioni russelliane e venne via via precisandosi e definendosi nelle opere del tedesco Hermann Weyl (1885-1955), del polacco Leon Chwistek (1884-1944), dell'inglese Frank Plumpton Ramsey (1903-1930) e poi di molti altri, non coinvolge, è bene sottolinearlo, almeno in linea di principio, l'idea della possibilità dell'attualità dell'infinito. In particolare, per questo concettualismo (che verrà in seguito meglio precisato come "concettualismo predicativista" o, più semplicemente, come "predicativismo") è senz'altro accettabile la considerazione della totalità degli enti costituibili attraverso un determinato processo. Di qui, in particolare, l'accettazione da parte del predicativismo della totalità attualmente infinita e in sé completa dei numeri naturali, in quanto totalità degli enti che si possono generare a partire dallo zero attraverso il procedimento di passaggio al successivo.

15. L'intuizionismo brouweriano

Assai più radicale la posizione di quegli studiosi che si dicono "intuizionisti" o "neo-intuizionisti"[2] e che, almeno per certi versi, assai meglio dei predicativisti si possono considerare gli eredi diretti di coloro che, principalmente nel quadro generale della tematica riduzionista, rappresentarono nell'Ottocento il punto di vista costitutivo nel contesto del problema delle entità matematiche (il più significativo fra questi fu, come già ricordato, Leopold Kronecker, il "nemico" di Weierstrass e di Cantor). Per questi intuizionisti, fra cui domina la figura dell'olandese Jan Luitzen Egbertus Brouwer (1881-1966), l'idea di una totalità in sé conclusa dei risultati di un processo generativo è priva di senso. Il processo e le sue possibilità sono l'unica cosa che c'è; dei suoi risultati si può dire che sono infiniti soltanto nel senso che, ad esempio, ogni punto eventualmente raggiunto può essere superato. L'infinità dei risultati è cioè solo *potenziale*, mai *attuale*.
Esistenza di un ente non può significare sua eventuale possibilità, ma soltanto sua avvenuta costituzione; ne consegue, in particolare, che dei due tipi di dimostrazione di esistenza correntemente usati in matematica:
(a) definizione di un ente e dimostrazione del fatto che l'ente definito gode della proprietà richiesta (dimostrazione diretta);
(b) dimostrazione del fatto che se ogni ente non godesse della proprietà in questione si arriverebbe a una contraddizione (dimostrazione indiretta);
solo la prima è accettata per buona, almeno nel senso che solo la prima è considerata una dimostrazione di esistenza (la seconda può anche essere interessante;

[2] Nella lettura: A. HEYTING, *Disputa*, si può trovare una chiara enunciazione di alcuni tratti essenziali della posizione intuizionista.

non dimostra però un'esistenza).
Se ne ricava che, in particolare, la stessa logica proposizionale, questo fondamento "semplicissimo" della logica, è da rivedere. In particolare non può essere accettata quella legge che sta alla base della equivalenza delle due vie sopra ricordate per una dimostrazione di esistenza e che è nota come "legge del terzo escluso": per ogni proposizione p, o p o non p.
La prospettiva rigorosamente costruttivista proposta e difesa da Brouwer e dai suoi discepoli (il maggiore dei quali e senza dubbio l'olandese Arend Heyting [n. 1898]), dopo un iniziale periodo di isolamento, dovuto, oltre che alla radicale novità di certe sue impostazioni, anche a una certa forse eccessiva ambiguità e oscurità terminologica, si e andata via via gradualmente affermando e, perdute anche, almeno in parte, certe iniziali carica polemica e aspirazione esclusivistica, è oggi al centro dell'attenzione di vasti settori della logica e della filosofia della matematica.

16. La questione degli universali e la matematica

Concludiamo questo breve accenno alle tre grandi prospettive (platonismo, concettualismo predicativista, intuizionismo) emerse sia pure in modi diversi, da alcuni tratti presenti negli atteggiamenti anassiomatici e riduzionisti del secolo scorso, sottolineando il fatto che tali prospettive non risultano essere soltanto delle possibilità alternative offerte alla riflessione filosofica generale, ma si traducono ben presto in proposte alternative sul piano stesso della riflessione matematica. La matematica compatibile con una concezione circa la natura degli enti astratti non è in generale compatibile con un'altra. La nuova "disputa degli universali" ha messo in luce implicazioni scientifiche e teoretiche che non potevano certo venire immaginate in una situazione culturale in cui l'infinito matematico non aveva particolare rilevanza.
Si noti peraltro che l'idea che le tre concezioni principali, rappresentando in certo modo tre scalini successivi sulla via di un rafforzamento del concetto di esistenza matematica, generino tre matematiche in graduale rapporto di mutilazione, è profondamente inadeguata. La cosa è particolarmente evidente nel caso dell'intuizionismo dove, non appena si salga un po' nella complessità delle teorie, risulta possibile dimostrare proposizioni che sono false per il matematico platonico (o come anche si dice, "classico"). L'analisi intuizionista, in particolare, ossia la teoria intuizionista del continuo reale, non è un "pezzo" dell'analisi classica, bensì un'altra cosa, diversa e anzi incompatibile con la prima. Cioò senza dire di altri risultati, a prima vista stupefacenti, ottenuti dai sovietici A. N. Kolmogoroff e V. Glivenko, dall'austriaco Kurt Gödel etc., in base ai quali v'è un senso preciso

in cui sono vaste parti della matematica classica a poter essere considerate come "pezzi" delle corrispondenti teorie intuizioniste.

17. Assiomi e non-contraddizione

Riprendiamo ora in esame gli sviluppi in questo secolo dell'altro grande filone ottocentesco, quello che approda alla rivoluzione assiomatica. Questo sviluppo è indissolubilmente legato, nel Novecento, alla figura di David Hilbert. Già abbiamo avuto modo di osservare che il problema della giustificazione degli assiomi che si era venuto ponendo di pari passo con il dissolversi della funzione fondante della intuizione era andato via via precisandosi come problema della non-contraddittorietà. La scoperta delle antinomie solleva la questione, prima insospettata, della necessita di garantirsi non soltanto contro le contraddizioni che possono annidarsi negli assiomi di una teoria, ma anche contro quelle che possono eventualmente venire introdotte dallo stesso apparato logico deduttivo. Ne consegue il riconoscimento della necessità di una esplicitazione rigorosa di tutti i "meccanismi" linguistici e logici attraverso cui si organizza la teoria. Ciò spinge gradualmente verso una formalizzazione completa delle teorie matematiche. La formalizzazione di una teoria - a torto spesso confusa con quel suo vistoso ma in fondo inessenziale aspetto che è la simbolizzazione - consiste nella esplicitazione rigorosa del bagaglio inguistico ammesso (sia esso tratto dal "linguaggio naturale" o costituito da "simboli") e nella non meno rigorosa esplicitazione delle possibili regole di combinazione e, più in generale, manipolazione di questo bagaglio linguistico, in modo tale che, in particolare, il concetto di forma espressiva ammissibile e di dimostrazione di una forma espressiva ammissibile risultino completamente determinati a prescindere da qualunque ricorso ai significati che si possano o si vogliano associare a quei simboli. La non-contradditorietà di una teoria viene ora identificata con la impossibilità di ottenere, per applicazione delle regole di manipolazione ammesse, una dimostrazione che termina con una proposizione congiunta con la sua negazione.
Giustificare una teoria vorrà ora dire *dimostrare* la sua non-contraddittorietà.

18. Intuizione finitaria e intuizione infinitaria

Ma non si cadrà in un circolo? Per giustificare una teoria, ossia per dimostrare la sua non-contraddittorietà, non si dovrà forse fare ricorso all'evidenza, alla intuizione, a quelle cose, cioè, delle quali appunto dubitiamo e che ci hanno spinto a cercare nella, non-contraddittorietà un sostituto alle loro troppo malfide prestazioni?

L'opinione di Hilbert è che, entro certi limiti, una siffatta circolarltà è inevitabile. Con niente non si fa niente. La possibilità e la capacità di manovrare su sistemi finiti di oggetti capendo quello che stiamo facendo ce le dobbiamo riconoscere. Perciò quelle teorie matematiche che ammettono modelli finiti possono venir dimostrate non-contraddittorie *ostensivamente*, manovrando cioè direttamente opportuni enti materiali o più genericamente simbolici. Ma i veri problemi della intuizione e della evidenza si collocano in rapporto a un altro tipo di teorie: quelle che hanno soltanto modelli infiniti. Di questo genere sono, in particolare, quei tre pilastri della matematica che sono la teoria dei numeri naturali, la teoria dei numeri reali e la teoria degli insiemi. Qui l'intuizione alla quale si deve fare appello per una giustificazione contenutistica delle loro asserzioni è di tipo assai diverso. L'evidenza da conseguire è assai più complessa di quella *finitaria* richiesta negli altri casi e alla quale, come si è visto non possiamo rinunciare. Ma se noi rinunciamo, o non ci fidiamo, della intuizione *infinitaria* necessaria in questi nuovi casi, siamo davvero impotenti di fronte al problema di trovare una dimostrazione di non-contraddittorietà? No, sostiene Hilbert, perché la proprietà di essere non-contraddittorio è una proprietà di certi sistemi simbolici. I simboli, le formule, le dimostrazioni delle nostre teorie formalizzate sono oggetti "concreti", finiti, le "regole del gioco" sono prescrizioni di tipo finitario. Dunque, pensa Hilbert, la sola intuizione finitaria sarà impegnata nella dimostrazione del fatto che applicando quelle regole non si riesce a generare una configurazione simbolica rappresentante una contraddizione.

19. II programma hilbertiano

Le idee preaccennate si concretizzano nel "programma hilbertiano"[3] per la fondazione della matematica, che si lascia così schematicamente formulare:
(a) Tutte le teorie della matematica classica devono venir sostituite dalle loro versioni formalizzate. La "Matematica" è ora il complesso di questi sistemi formali;
(b) giustificare la matematica vuoi dire dimostrare la non-contraddittorietà della "Matematica";
(c) la non-contraddittorietà della "Matematica" viene dimostrata nella metamatematica la quale dispone di quegli strumenti logici e deduttivi che sono ammessi nella matematica *finitista*, che è quella parte della matematica che poggia sulla intuizione finitaria.

[3]Le letture: J. HERBRAND, *Introduzione alle ricerche sulla teoria della dimostrazione* e J. VON NEUMANN, *La fondazione formalistica della matematica*, espongono le idee fondamentali del programma hilbertiano.

Dato che la non-contraddittorietà della maggior parte dei sistemi formali matematici si lascia finitisticamente ricondurre a quella delle tre grandi teorie dei naturali, dei reali e degli insiemi, in Hilbert era presente l'idea che i veri nodi da sciogliere fossero le dimostrazioni di non-contraddittorietà per questi tre sistemi formali. Tenuto conto degli ovvii rapporti di forza fra i tre, poi, conveniva aggredire dapprima il problema della non-contraddittorietà per il sistema formale della teoria dei numeri naturali. Una volta conseguito questo risultato, l'*intero* bagaglio concettuale e deduttivo di questa teoria si sarebbe trovato a possedere una giustificazione e avrebbe pertanto potuto venir aggiunto alla sfera metamatematica, rendendo questa assai più potente e capace di affrontare lo scalino successivo, e così via.
Le idee hilbertiane trovarono subito entusiastica accoglienza da parte di alcuni giovani studiosi, fra i quali vanno ricordati almeno lo svizzero Paul Bernays (n. 1888), il tedesco Wilhelm Ackermann (1898-1962), l'ungherese Johann von Neumann (1903-1957), una delle grandi figure della matematica del nostro secolo, e il francese Jacques Herbrand (1908-1931). Alcuni importanti successi conseguiti negli anni venti contribuirono a consolidare la persuasione non soltanto della sensatezza del programma hilbertiano, ma anche della sua relativamente rapida realizzabilità.

20. Le scoperte di Gödel

Come una vera e propria bomba agì quindi in questa atmosfera la conoscenza di un risultato ottenuto nel 1931 dall'austriaco Kurt Gödel (n. 1906).
Nel 1928 Hilbert aveva sollevato la questione circa la completezza della teoria dei numeri; aveva cioè domandato se i noti assiomi peaniani della teoria elementare dei numeri fossero o meno in grado di dimostrare o di refutare ogni proposizione di quella teoria. Gödel dimostrò non soltanto che cosi non era, ma anche che non era possibile costruire un sistema di assiomi per la teoria dei numeri che godesse della completezza richiesta da Hilbert. La teoria dei numeri non era cioè soltanto incompleta, ma anche, in un senso ben definito, incompletabile. Malgrado la sua enorme rilevanza questo risultato non basterebbe da solo a spiegare le parole da noi usate in precedenza a proposito del lavoro di Gödel. Il fatto è che dalla dimostrazione di quel suo primo risultato Gödel seppe trarre un corollario (il famoso teorema di Gödel sulla indimostrabilità della non-contraddittorietà di un sistema formale capace di formalizzare i mezzi ammessi per tale dimostrazione) da cui scendeva che il programma hilbertiano, così come esso si era venuto configurando e precisando nel corso degli anni venti, era per principio irrealizzabile; era, in particolare, impossibile dimostrare con mezzi rigorosamente finitisti la non-contraddittorietà della

teoria elementare dei numeri[4].
Le ripercussioni di questo lavoro di Gödel furono immense. La sua ricchezza di spunti logici, matematici e filosofici è tale che esso può giustamente venir preso come un momento di svolta fondamentale nella storia del pensiero astratto; da esso si dipartono alcune delle direttrici fondamentali della ricerca successiva.
Senza entrare in un discorso che sarebbe qui fuori luogo, ricordiamo che questo lavoro ebbe, fra l'altro, un ruolo determinante nello sviluppo di quella problematica che culminò intorno al 1936 nella costituzione di una definizione rigorosa del concetto di *operazione effettivamente eseguibile*, definizione che, per la sua importanza e per la vastità delle conseguenze e delle indagini di cui fu l'inizio, può considerarsi come una delle conquiste più significative della logica e della filosofia della matematica di questo secolo.

21. Gli sviluppi della teoria della dimostrazione

Sembra invece opportuno soffermarsi un istante sulle conseguenze immediate avute dal teorema di Gödel sul programma hilbertiano. Forzando lievemente i termini, si può dire che Gödel ha mostrato che l'idea hilbertiana di eludere, spostando il piano di intervento da quello del contenuto a quello della forma, il sovraccarico infinitario cui si trova esposta la intuizione nel momento giustificativo della matematica classica, ha dei limiti; non è possibile, in generale, indebolire tale carico sino a renderlo puramente finitario. Gödel, si badi bene, non ha mostrato né che l'idea di spostare dal contenuto alla forma il piano di intervento dell'intuizione sia insensato (e che dunque sia necessario ritornare a una giustificazione contenutistica o basata su certe ipotesi di carattere ontologico - platonismo - o fondata su una evidenza, più o meno infinitaria sì, ma controllata - intuizionismo, predicativismo -), né che, per vie che noi oggi non riusciamo a immaginare, non possa un giorno risultare possibile dare una giustificazione della matematica classica attraverso la sola evidenza finitaria.
Egli ha "soltanto" mostrato che se giustificare vuoi dire provare la indimostrabilità formale di una contraddizione, allora l'evidenza finitaria non basta.
Un grande passo in avanti nella chiarificazione stessa del significato del risultato di Gödel fu compiuto pochi anni dopo da un altro allievo di Hilbert, il tedesco Gerhard Gentzen (1909-1945). Egli riuscì infatti a rinvenire un principio logico che, pur non essendo finitista, presenta tuttavia elevati caratteri di costruttività ed è, in particolare, intuizionisticamente del tutto pacifico, il quale ha questa fondamentale proprietà: ammesso nella sfera metamatematica rende possibile la

[4] Una sintetica esposizione dei risultati di Gödel si può trovare nella lettura. K. GÖDEL, *Appendice agli atti del Congresso di Königsberg.*

dimostrazione di non-contraddittorietà del sistema formale della teoria elementare dei numeri. Questo grande risultato di Gentzen è alla base di importanti sviluppi che costituiscono la moderna, post-hilbertiana teoria della dimostrazione.

22. La semantica tarskiana

V'era però una domanda che la particolare attenzione rivolta dalla scuola hilbertiana agli aspetti più squisitamente deduttivi e formali della organizzazione assiomatica aveva potuto in qualche modo lasciare in ombra ma che non aveva certo potuto sopprimere, tanto questa era essenzialmente connessa alle prospettive più generali dell'assiomatica così come essa era emersa dal lungo travaglio dell'Ottocento.

Erano decenni che si andava ripetendo che le proposizioni della geometria non pretendevano di parlare (o di parlare soltanto) dei punti e delle rette dello spazio fisico, ma che enunciavano situazioni sussistenti in ogni possibile modello degli assiomi; a Russell, che sosteneva di aver definito i numeri naturali, si obiettava che, nella migliore delle ipotesi, era riuscito a costruire un modello, uno fra i tanti possibili, per gli assiomi di Peano; a chi avanzava dubbi sulla consistenza della geometria di Lobacewski si replicava che essa non era meno incerta di quella di Euclide dato che in in quest'ultima, come avevano fatto vedere prima l'italiano Eugenio Beltrami (1835-1900) e poi il tedesco Felix Klein, si poteva costruire un modello per la prima.

Ecco, ma che cosa era esattamente un modello? Che cosa, in altre parole, si intendeva esattamente dire con quel termine che pure veniva così largamente usato e che tutti mostravano in pratica di saper capire e adoperare?

V'erano, certo, usi di quella parola che potevano venir soddisfacentemente precisati mediante l'apparato concettuale messo a disposizione dalla scuola hilbertiana. Così il discorso circa il rapporto geometria euclidea-geometria lobacewskiana si poteva per esempio precisare secondo le idee che qui schizziamo per il caso della geometria piana: è possibile definire nel sistema formale della geometria euclidea in corrispondenza a ogni concetto geometrico (punto, retta etc.) un corrispondente concetto "secondo Lobacewski" (punto secondo Lobacewski, retta secondo Lobacewski etc.) in modo tale che tutte le proposizioni che si ottengono dagli assiomi della geometria euclidea (eccezion fatta per l'assioma delle parallele), sostituendo in essi i concetti euclidei con i corrispondenti concetti "secondo Lobacewski", sono teoremi della geometria euclidea, e inoltre è un teorema della geometria euclidea la proposizione: per un "punto secondo Lobacewski" che non "giaccia secondo Lobacewski" su una "retta secondo Lobacewski" "passa secondo Lobacewski" più di una "parallela secondo Lobacewski" alla "retta secondo

Lobacewski" data. Il concetto di modello si lasciava, cioè, in questo caso precisare come traducibilità di un sistema formale in un altro. Non dissimile anche se più complicata era la situazione nel caso dei numeri naturali di Russell e degli assiomi di Peano. C'erano però altri, non meno importanti e frequenti usi del concetto di modello per i quali una siffatta via non era adeguata.
Quando, per esempio, riprendendo un grande risultato di Dedekind, si affermava che il sistema assiomatico di Peano caratterizzava i numeri naturali, in quanto tutti i suoi modelli erano fra loro isomorfi, ossia possedevano la stessa struttura; quando, come aveva scoperto Gödel nel 1930, si enunciava il fondamentale risultato che ogni teoria assiomatica elementare (ogni teoria, cioè, che non usi locuzioni come: "tutte le proprietà", "tutte le relazioni" etc.) se è non contraddittoria nel senso di Hilbert, allora possiede un modello; o quando, ancora, si enunciava quell'altro pilastro della conoscenza logica del nostro secolo, mostrato nel 1915 dal tedesco Leopold Löwenheim (1878-1944) e poi generalizzato dal grande norvegese Thoralf Skolem (1887- 1963), secondo il quale se una teoria elementare possiede un modello, allora essa ne possiede anche uno sul sistema dei numeri naturali, si stava usando un concetto di modello che non si lasciava semplicemente ricondurre al problema di una traduzione di un sistema formale in un altro nel senso sopra accennato, ma presupponeva una precisazione del rapporto che sussiste non fra due linguaggi ma fra un linguaggio e un sistema di enti.
Che cosa fosse un sistema di enti si poteva ritenere di saperlo attraverso la teoria degli insiemi; quel che bisognava precisare era il senso preciso della locuzione: il tale sistema di enti soddisfa (o è un modello della) tale teoria. Tale problema fu affrontato e risolto dal Polacco Alfred Tarski (n. 1902) attraverso la sua celebre definizione del concetto di verita per i linguaggi formalizzati, definizione che è alla base di quella che negli anni trenta e quaranta fu chiamata la semantica e che si è trovata poi ad essere largamente generalizzata ed estesa in quella che oggi si chiama la teoria dei modelli, uno dei grandi rami della moderna indagine logica e fondazionalistica[5].

[5] Le idee della semantica tarskiana sono presentate nella lettura: A. TARSKI, *Verità e dimostrazione*. Malgrado questa lettura, per evidenti motivi di coerenza, si trovi collocata alla fine del volume, tuttavia può essere letta vantaggiosamente per prima. Essa contiene infatti un certo numero di informazioni di carattere metodologico generale che possono notevolmente agevolare la comprensione degli altri testi.